第５講　場合の数・確率(3)

1　3 個のさいころを同時に投げる．

(1)　出る目の最小値が 3 以上になる確率を求めよ．

(2)　3 個のうち，いずれか 2 個の目の和が 8 になる確率を求めよ．

(3)　出る目の最小値が 2 以下になり，かつどの 2 個の目の和も 8 でない確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) 袋の中に赤玉1個と白玉2個が入っている．この袋から中を見ないで玉を1個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に赤玉が取り出される確率 P_k $(k=1, 2, 3)$ を求めよ．

(2) 袋の中に赤玉2個と白玉 n 個が入っている．この袋から中を見ないで玉を1個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に2個目の赤玉が取り出される確率 Q_k $(k=2, 3, \cdots, n+2)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　3人でじゃんけんをし，勝者が1人になるまで繰り返す．ただし，ある回のじゃんけんで負けた者は，その次以降の回では参加できないものとする．

(1)　1回のじゃんけんの後，3人が勝ち残っている確率，および，2人が勝ち残っている確率をそれぞれ求めよ．

(2)　ちょうど3回でじゃんけんが終わる確率を求めよ．

(3)　じゃんけんが n 回以下で終わる確率を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　場合の数・確率(3)

n を3以上の整数とする．1から n までの番号をつけた n 枚の札の組が2つある．これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を1枚ずつ3回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする．取り出した札はもとに戻さないものとして，次の問いに答えよ．ただし，$\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}}$ とする．

(1)　$2n$ 枚の札をすべて区別すると，3回分の札の取り出し方は全部で

$\boxed{\text{ア}}\,n(\boxed{\text{イ}}\,n-\boxed{\text{ウ}})(n-\boxed{\text{エ}})$ 通りある．

(2)　$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めたい．

X_1，X_2，X_3 はすべて異なるので，X_1，X_2，X_3 の番号の決め方は

$\dfrac{n(n-\boxed{\text{オ}})(n-\boxed{\text{カ}})}{\boxed{\text{キ}}}$ 通りあり，小さい順に X_1，X_2，X_3 の番号と決まる．同じ番号の札が2枚ずつあることを考慮すると，$X_1<X_2<X_3$ となる確率は

$\dfrac{n-\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}(\boxed{\text{コ}}\,n-\boxed{\text{サ}})}$ である．

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　場合の数・確率(3)

1　3個のさいころを同時に投げる．
(1)　出る目の最小値が3以上になる確率を求めよ．
(2)　3個のうち，いずれか2個の目の和が8になる確率を求めよ．
(3)　出る目の最小値が2以下になり，かつどの2個の目の和も8でない確率を求めよ．

3個のさいころを投げたときの出目の総数は 6^3 通り．

(1)　出目の最小値が3以上，すなわち3個とも3以上の出目となるとき，目の出方は 4^3 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{4^3}{6^3}=\mathbf{\dfrac{8}{27}}$

(2)　2個の目の和が8となるとき，その目の組合せは (6，2)，(5，3)，(4，4)

(i)　(6，2) のとき

もう1個の目が1，3，4，5のとき，3個のさいころの目の出方は　$3!=6$（通り）

もう1個の目が2，6のとき，3個のさいころの目の出方は　$\dfrac{3!}{2!}=3$（通り）

よって　$4\times6+2\times3=30$（通り）

(ii)　(5，3) のとき　30通り

(iii)　(4，4) のとき

もう1個の目が1，2，3，5，6のとき，3個のさいころの目の出方は3通り

もう1個の目が4のとき，3個のさいころの目の出方は1通り

よって　$5\times3+1\times1=16$（通り）

(i)〜(iii)より，求める確率は　$\dfrac{30+30+16}{6^3}=\mathbf{\dfrac{19}{54}}$

(3)　事象 A：出る目の最小値が3以上　　事象 B：いずれか2個の目の和が8

とすると，それぞれの確率は(1)より　$P(A)=\dfrac{8}{27}$，(2)より　$P(B)=\dfrac{19}{54}$　である．

$A\cap B$ となるのは，(2)より3個のさいころの目が

(5，3，4)，(5，3，6) のとき，それぞれの目の出方は6通り

(5，3，3)，(5，3，5)，(4，4，3)，(4，4，5)，(4，4，6) のとき，それぞれの目の出方は3通り

(4，4，4) のとき，目の出方は1通り

よって　$6\times2+3\times5+1=28$（通り）より　$P(A\cap B)=\dfrac{28}{6^3}=\dfrac{7}{54}$

したがって　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{8}{27}+\dfrac{19}{54}-\dfrac{7}{54}=\dfrac{14}{27}$

ゆえに，求める確率は　$1-P(A\cup B)=\mathbf{\dfrac{13}{27}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1)　袋の中に赤玉１個と白玉２個が入っている．この袋から中を見ないで玉を１個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に赤玉が取り出される確率 P_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ を求めよ．

(2)　袋の中に赤玉２個と白玉 n 個が入っている．この袋から中を見ないで玉を１個ずつ取り出す．取り出した玉はもとに戻さない．k 回目に２個目の赤玉が取り出される確率 Q_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n+2)$ を求めよ．

(1)　３個の玉の順列は　$\dfrac{3!}{1!2!}=3$（通り）

そのうち，赤玉が k 番目 $(k=1,\ 2,\ 3)$ となるのはそれぞれ１通り．

したがって　$\boldsymbol{P_k=\dfrac{1}{3}}$ $(k=1,\ 2,\ 3)$

(2)　$n+2$ 個の玉の順列は　$\dfrac{(n+2)!}{2!n!}={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$（通り）

そのうち k 番目に赤玉が出るとき，もう１個の赤玉が１番目から $k-1$ 番目のどこに出るかで $k-1$ 通り．

したがって　$Q_k=\dfrac{k-1}{\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2(k-1)}{(n+2)(n+1)}}$

3　３人でじゃんけんをし，勝者が１人になるまで繰り返す．ただし，ある回のじゃんけんで負けた者は，その次以降の回では参加できないものとする．

(1)　１回のじゃんけんの後，３人が勝ち残っている確率，および，２人が勝ち残っている確率をそれぞれ求めよ．

(2)　ちょうど３回でじゃんけんが終わる確率を求めよ．

(3)　じゃんけんが n 回以下で終わる確率を求めよ．

(1)　３人のじゃんけんをするとき，手の出方は 3^3 通り．

このうち，１人勝ちとなるのは，誰が何の手で勝つかで　${}_3\mathrm{C}_1\times3=3^2$（通り）

その確率は　$\dfrac{3^2}{3^3}=\dfrac{1}{3}$

また，２人勝ちとなるのは　${}_3\mathrm{C}_2\times3=3^2$（通り）　その確率は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

よって，３人勝ち残り，すなわちあいこの確率は　$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2)　２人でじゃんけんをするとき，手の出方は 3^2 通り．

このうち，どちらかが勝つのは　${}_2\mathrm{C}_1\times3=6$（通り）　その確率は　$\dfrac{6}{3^2}=\dfrac{2}{3}$

よって，あいことなる確率は　$1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 人でじゃんけんを行って 2 人勝ち，1 人勝ち，あいことなることをそれぞれ $_3W_2$，$_3W_1$，D_3 と表し，2 人でじゃんけんを行って 1 人勝ち，あいことなることをそれぞれ $_2W_1$，D_2 と表すこととする．

$_2W_1$ が起こる確率は $\dfrac{2}{3}$ であり，他のものが起こる確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である．

ちょうど 3 回で終わるのは，順に

$D_3\ D_3\ {}_3W_1$，$D_3\ {}_3W_2\ {}_2W_1$，${}_3W_2\ D_2\ {}_2W_1$　のときである．

よって，求める確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{27}}$

(3)　n 回までに終わらない確率を考える．

1 回目から k 回目（$0\leqq k\leqq n$）まで D_3，$k+1\leqq n$ のときは $k+1$ 回目で $_3W_2$，$k+2\leqq n$ のときは $k+2$ 回目から n 回目まで D_2 が起こる確率は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

これは k によらない関数である．

したがって，n 回で終わらない確率は

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot(n+1)$$

ゆえに，求める確率は　$\boldsymbol{1-(n+1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　場合の数・確率(3)

n を 3 以上の整数とする．1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある．これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする．取り出した札はもとに戻さないものとして，次の問いに答えよ．ただし，[オ] < [カ] とする．

(1)　$2n$ 枚の札をすべて区別すると，3 回分の札の取り出し方は全部で

[ア]n([イ]$n-$[ウ])($n-$[エ]) 通りある．

(2)　$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めたい．

X_1，X_2，X_3 はすべて異なるので，X_1，X_2，X_3 の番号の決め方は

$\dfrac{n(n-\text{[オ]})(n-\text{[カ]})}{\text{[キ]}}$ 通りあり，小さい順に X_1，X_2，X_3 の番号と決まる．同じ番号の札が 2 枚ずつあることを考慮すると，$X_1<X_2<X_3$ となる確率は

$\dfrac{n-\text{[ク]}}{\text{[ケ]}(\text{[コ]}n-\text{[サ]})}$ である．

(1)　取り出した札をもとに戻さないので，3 回分の札の取り出し方は

$${}_{2n}\mathrm{C}_3\times 3!={}_{2n}\mathrm{P}_3=2n(2n-1)(2n-2)=\mathbf{4}n(\mathbf{2}n-\mathbf{1})(n-\mathbf{1})\ （通り）$$

(2)　X_1，X_2，X_3 の番号の決め方は　${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{n(n-\mathbf{1})(n-\mathbf{2})}{\mathbf{6}}$（通り）

選んだ番号は小さい順に X_1，X_2，X_3 の番号となる．

同じ番号の札が 2 枚ずつあるので，X_1，X_2，X_3 の番号に対する札の決め方はそれぞれ 2 通りある．

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3\times 2^3}{{}_{2n}\mathrm{P}_3}=\frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 8}{4n(2n-1)(n-1)}=\frac{n-\mathbf{2}}{\mathbf{3}(\mathbf{2}n-\mathbf{1})}$$